

MAKALE

Kaos İçindeki Düzen: Disiplinlerarası Bir Bakış

Efe Ali Mert¹¹ISTEK Bilge Kağan Anadolu Lisesi

Özet

Deterministik kaos; doğrusal (linear) ve indirgemeci modelleri, basit kuralların karmaşık ve öngörülemez davranışlara yol açabileceğini kabul eden doğrusal olmayan (nonlinear) bir bakış açısıyla değiştirerek, kabul görmüş bilimsel düşünceyi değiştirmiş ve değiştirmeye devam eden bir teori ve sistemler bütünüdür. Kaos teorisi sadece matematikle sınırlı bir teori değildir; kalpteki elektriksel aktiviteden (EKG sinyalleri) beyindeki elektriksel aktiviteye (EEG sinyalleri), elektrik devrelerindeki davranışlardan, basit görünümümlü ancak kaotik hareketler sergileyen çift sarkaçlara (double pendulum) kadar hayatın birçok alanında karşımıza çıkan temel bir kavramdır. Kaos teorisi; nörobilimde sinir ağlarındaki öz-örgütlenmeyi anlamaktan, tıpta aritmi tahminine yardımcı olmaya, yer biliminde nüfus döngülerini hesaplamaktan daha birçok spesifik alanda kullanılmakta ve bu disiplinlere önemli katkılar sağlamaktadır. Bu çalışma kaos teorisinin tarihçesi ve doğrusal olmayan sistemlerin farklı disiplinler ile bağlantısını inceleyecektir.

Keywords: Kaos Teorisi, Matematik, Disiplinlerarası Kaos, Kaotik Sistemler

1. Giriş

Kaos teorisi, son yüzyıldır ilgi çeken ve düşünüldenden çok daha disiplinlerarası bir konudur. Garnett P. Williams'a göre kaosu oluşturan iki temel esas, zaman ve değişim arasındaki ilişkidir. Bununla birlikte kendisi hava durumu, yemek fiyatları ve nüfus gibi kavram örnekleri verir ve bunların aralarındaki zaman-değişim ilişkisini vurgular; hatta bunun kaos jargonunda “**sistem**” olarak adlandırıldığından bahseder. Williams’ın “sistem”i tanımlayışı ise şöyledir: Bir “sistem”, hava sistemi gibi etkileşim hâlindeki parçaların bir araya gelmesidir. Zaman içindeki davranış teması, kaotik sistemlerin doğuşunda önemli bir yer edinmektedir. Bir deterministik sistemin nasıl kaotik özellikler gösterdiği sorusu, bu işin en ilgi çeken taraflarından biridir. Sistemlerden önce fraktallar ile kaos arasındaki ilişki gözden kaçırılmamalıdır. Strogatz, kaos ve fraktalların daha büyük bir konunun parçası olduğunu ve bunun **dinamikler** olduğunu söyler ve bu konunun zaman içinde evrimleşen sistemlerle ilgilendiğinden bahseder. Söz konusu sistem dengeye mi ulaşıyor, döngüler hâlinde mi kendini tekrarlıyor, yoksa daha karmaşık bir şey mi yapıyor; davranışı analiz etmek için dinamiklerin kullanıldığından bahseder Strogatz. Benzer şekilde Strogatz, dinamik fikirlerin birden fazla yerde karşımıza çıkmış olabileceğinden bahseder; bu örnekler: diferansiyel denklemler, klasik mekanik, kimyasal kinetik, nüfus biyolojisi derslerinde gibi örnekler vermiştir. Özetle, kaos teorisinin esasında sistem ve dinamik dediğimiz kavramlar yatmaktadır. “Sistem”in özünde ise zaman ve değişim arasındaki ilişki yatmaktadır ve bu ilişkiyi ise “dinamikler” sayesinde analiz ederiz.

2. Kaos ve Tarihçe

2.1. Dinamiklerin Tarihçesi

Dinamikler ne kadar disiplinlerarası bir konu olsa da aslında fizik dalından gelen bir konudur. Newton’ın 1600’lerin ortasında diferansiyel denklemleri ortaya koyması bir dönüm noktası yarattı. Diferansiyel denklemlerin doğuşuyla Newton, o zamanlar çözülmemeyen “iki cisim problemini” çözdü ve “üç cisim problemini” ortaya koydu. 1800’lerin sonlarında Poincaré’nin çalışmasından önce, matematikçiler ve fizikçiler onlarca yıl süren uzun çabaların sonunda bu problemin çözülmesini “imkansız” olarak kabul ettiler. Poincaré’nin çalışması bu probleme yeni bir bakış açısı kazandırdı. Poincaré, aslında daha basit ama geniş bir açıdan ele alarak şu soruyu sordu: “Güneş sistemi sonsuza dek sabit mi, yoksa bazı gezegenler sonunda sonsuza uçacak mı?” (2) Poincaré, bu şekilde “Niteliksel (Kalitatif) Dinamik Sistemler Teorisi”ni geliştirdi ve bu tarz soruları analiz edebilmek için “Poincaré Haritası” (Poincaré Map) veya “Birinci Dönüş Haritası” (First Return Map) geliştirdi. Bir Poincaré haritası, sürekli zamanlı bir diferansiyel denklem sisteminden ayrık zamanlı bir harita (map) elde etme yöntemidir. Bu şekilde sistemlerin incelenmesine bir kapı açtı. Bundan sonra, kronolojik olarak dinamiklerin tarihçesindeki gelişmeler, doğrusal olmayan osilatörler; radyo, radar, lazerin icadı gibi daha çok disiplinlerarası çalışmalarla devam etti. 1920 ile 1960 arasında Birkhoff, Hamiltoniyen mekaniğinde kaotik davranışlar tespit etti ve 1963’te ise MIT’de (Massachusetts Institute of Technology) akademisyen meteorolog ve matematikçi Edward N. Lorenz, atmosferik konveksiyonla ilgili çalışmasını modellemek için “Lorenz sistemini” ve “Lorenz çekicisini” (atraktör) ortaya koydu. Hatta bir konferansta sistemin ne kadar başlangıç değerlerine hassas olduğunu vurgulamak için “Bir martının kanat çırpışı, dünyanın öbür ucunda bir kasırgaya yol açabilir” cümlesini kurdu ve atraktörün şeklinin kelebeğe benzemesinden dolayı bu ifade “bir kelebeğin kanat çırpışı”na dönüşüp “kelebek etkisi” dediğimiz olgunun doğmasına yol açtı. Bu gelişimin ardından 1970’lerde May,

”lojistik harita”daki kaotik davranışları keşfetti; bununla birlikte bundan sonra Feigenbaum, Winfree gibi araştırmacılar kaosu daha disiplinlerarası çalışmalarda kullandı. 1970’lerin sonunda Benoit Mandelbrot, ”fraktal geometri” kavramını ortaya atarak ve ”Mandelbrot kümesi”ni görselleştirerek, kaotik sistemlerin davranışını anlamak için gerekli olan geometrik dili sağlamış oldu.

3. Disiplinlerarası Uygulamalar ve Bağlantılar

3.1. Biyoloji ve Tıp

3.1.1. Fraktal Boyut Nedir?

Fraktal boyut bir sistemin düzenini hesaplamak için kullanılan yöntemlerden biridir. Bu şekilde bir sistemin ne kadar düzenli bir örüntüde ilerlediği ya da tam tersi olarak ne kadar karmaşık ve kaotik olarak ilerlediğini niceliksel olarak hesaplamamıza yardımcı olan yöntemlerdir.

3.1.2. Fraktal Boyut Formülleri

3.1.3. Box Counting (Kutu Sayma) Yöntemi

$$D_b = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

Açıklama.

- D_b : Box counting fraktal boyutu
- ϵ : Kutu boyutu (ölçek)
- $N(\epsilon)$: ϵ boyutundaki kutularla kaplanan kutu sayısı
- Pratik uygulamada: ϵ değerleri için $\log N(\epsilon)$ vs $\log(1/\epsilon)$ grafiğinin eğimi

3.1.4. Katz Yöntemi

Temel Tanımlar.

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (t_{i+1} - t_i)^2}$$

$$d = \max \sqrt{(x_i - x_1)^2 + (t_i - t_1)^2}$$

Fraktal Boyut Formülü.

$$D_k = \frac{\log(n)}{\log(n) + \log(d/L)}$$

veya

$$D_k = \frac{\log(L/a)}{\log(d/a)}$$

Açıklama.

- D_k : Katz fraktal boyutu
- L : eğrinin toplam uzunluğu
- d : başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki Öklid mesafesi
- n : nokta sayısı
- a : ortalama adım uzunluğu

3.1.5. Higuchi Yöntemi

Algoritma Adımları.

$$L_m(k) = \frac{N-1}{[(N-m)/k]k^2} \sum_{i=1}^{[(N-m)/k]} |x(m+ik) - x(m+(i-1)k)|$$

Fraktal Boyut Hesaplama.

$$\langle L(k) \rangle = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k L_m(k)$$

$$\log \langle L(k) \rangle \propto D_h \cdot \log(1/k)$$

Açıklama.

- D_h : Higuchi fraktal boyutu
- k : zaman serisinin alt örnekleme faktörü
- m : başlangıç zaman indeksi
- N : zaman serisinin toplam uzunluğu
- Genellikle sinyal işleme ve zaman serisi analizinde kullanılır

3.1.6. Fraktal Boyut ve Tıp

Box Counting Yöntemi Özellikleri

- En yaygın kullanılan yöntem
- 2B ve 3B görüntüler için uygundur
- Uygulaması nispeten basittir
- Hesaplama karmaşıklığı yüksek olabilir

Higuchi Yöntemi Özellikleri

- Zaman serilerinin fraktal özelliklerini analiz eder
- Non-lineer sinyal işlemede kullanılır
- EEG, EKG gibi biyomedikal sinyallerin analizinde yaygındır

Katz Yöntemi Özellikleri

- Eğrilerin karmaşıklığını ölçer
- Nörolojik hastalıkların teşhisinde kullanılır
- Hareket analizi ve koordinasyon çalışmalarında uygundur

3.2. Fizik ve Mühendislik

3.2.1. Poincaré Haritasının Formülü (Matematiksel Tanımı)

Poincaré haritası, sürekli olan dinamik sistemleri ayrık zamana indirmek için kullanılan yöntemlerden birisidir. Matematiksel olarak, R^n 'de tanımlı bir diferansiyel denklem sistemi düşünelim:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n$$

Bir Poincaré kesiti S , faz uzayında R^{n-1} boyutunda bir yüzey olarak tanımlanır. Poincaré haritası $P: S \rightarrow S$ ise şu şekilde tanımlanır:

$$P(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\tau(\mathbf{x}_0); \mathbf{x}_0)$$

Burada $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ başlangıç koşuluyla sistemin çözümüdür ve $\tau(\mathbf{x}_0) > 0$, $\mathbf{x}_0$ noktasından başlayan yörüngenin S kesitini ilk kez tekrar kestiği zamandır.

3.2.2. Çift Sarkaçların Kaotik Doğası

Çift sarkaç, birincinin ucunda bulunan ikinci sarkaçın pivotuyla birbirine bağlı iki sarkaçtan oluşur. Basit bir sarkaçta bir sonraki hareketi tahmin etmek kolay olsa da, çift sarkaçlar basit sarkaçlardan daha karmaşıktır. Bu karmaşık yapı, zenginleştirici bir doğrusal olmayan dinamiği tasvir eder ve onlarca yıldır

matematikçilerin ve fizikçilerin ilgisini çekmiştir.

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 = 0 \quad x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Bu denklemlerin çözümü, başlangıç koşullarına son derece hassas bağımlılık gösterir. Lyapunov üssü ^a pozitif değerler alır ve sistemin kaotik davranış sergilediğini gösterir. Çift sarkaç, enerji dağılımı ve kaos teorisinin temel kavramlarını anlamak için ideal bir model sistemidir.

3.2.3. Kriptoloji ve Kaos

Kaotik sistemler rastgele sayı üretimi (PRNG) için bazı kriptolojik yöntemlerde çokça kullanılmaktadır. En çok kullanılan sistemler; lojistik harita, Henon haritası ve Lorenz sistemi olarak sıralanabilir.

3.3. Ekonomi ve Finans

3.3.1. Borsa ve Fraktallar

Finansal değişimler genellikle rassal değişimler olarak yorumlansa da, fraktal boyut özellikleri taşımaktadır. Ayrıca Mandelbrot, fraktal boyut kavramı ile finansal verilerin analizinin yapılabileceğini öne koymuştur. Hurst üssü olarak bilinen parametre, finansal zaman serilerinin uzun vadeli bağımlılıklarını ölçer:

$$R/S = (cN)^H$$

Burada R/S yeniden ölçeklendirilmiş aralık, N gözlem sayısı, c bir sabit ve H Hurst üssüdür. $H > 0.5$ değeri, seride uzun vadeli bağımlılık olduğunu gösterir. Finansal piyasaların bu fraktal doğası, risk yönetimi ve portföy optimizasyonu stratejilerinde önemli etkilere sahiptir.

3.4. Meteoroloji ve Ekoloji

3.4.1. Lorenz Sistemi ve Çekicisi

Lorenz sistemi, atmosferik konveksiyonu modellemek için Edward Lorenz tarafından geliştirilmiş üç boyutlu bir diferansiyel denklem sistemidir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{aligned}$$

Burada σ , ρ ve β sistem parametreleridir. $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$ değerleri için sistem kaotik davranış sergiler ve Lorenz çekicisi olarak bilinen karakteristik kelebek şeklini oluşturur. Aslında kelebek etkisi dediğimiz terim de buradan doğmuştur. Bu sistem, kaos teorisinin en ikonik örneklerinden biridir ve başlangıç koşullarına hassas bağımlılık kavramını somutlaştırır.

3.4.2. Lojistik Harita ve Kaos

Lojistik harita, popülasyon dinamiklerini modellemek için kullanılan basit ama derin matematiksel bir modeldir:

^aLyapunov üssü, bir sistemin ne kadar kaotik olduğunu ölçmek için kullanılan bir yöntem

Burada $x_n \in [0, 1]$ nüfus oranını, $r \in [0, 4]$ ise büyüme parametresini temsil eder. r parametresinin artmasıyla sistem periyotikileme (period-doubling) yolundan geçerek kaosa ulaşır.

3.5. Kimyasal Reaksiyonlar ve Kaos

Bazı kimyasal reaksiyonlar kaotik özellikler gösterebilmektedir. Bunlardan bir tanesi Belousov-Zhabotinsky (BZ) reaksiyonudur. Kaotik salınımlar gösteren en ünlü kimyasal sistem olarak adlandırılabilir.

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - \frac{fz(x - \mu)}{x + \mu} \\ \frac{dz}{dt} &= x - z \end{aligned}$$

- x ve z : Sistemin durum değişkenleridir. Kimyasal bağlamda, bu değişkenler genellikle ara maddelerin (örneğin, $HBrO_2$ ve Br^- gibi) boyutsuz konsantrasyonlarını temsil eder.
- ϵ (epsilon): Zaman ölçeklerini ayıran bir parametredir. Genellikle $0 < \epsilon \ll 1$ şeklinde küçük bir değerdir. Bu, x değişkeninin z değişkenine kıyasla çok daha hızlı değiştiği anlamına gelir. Bu, "hızlı-yavaş" dinamik sistemlerinin tipik bir özelliğidir ve salınımların ve kausun ortaya çıkmasında kritik bir rol oynar.
- f : Bir "stokiyometrik katsayı" veya reaksiyon hızını kontrol eden bir parametredir. Modelin dinamiğini (sabit nokta, limit çevrimi, kaos) belirlemede anahtar bir rol oynar.
- μ (mu): Modeldeki kinetik oran sabitlerinden türetilen küçük bir parametredir. Genellikle $0 < \mu \ll 1$ alınır. Reaksiyon hızı ifadesini (modeldeki ikinci terim) modüle eder ve sistemin doğrusal olmayan davranışına katkıda bulunur.

Bu model, kimyasal reaksiyonlardaki kaotik davranışları anlamamıza yardımcı olur ve biyolojik sistemlerdeki salınımları anlamamıza yardımcı olmaktadır.

4. Tartışma ve Sonuçlar

Sonuç olarak kaos teorisi, bilimsel düşüncede bir dönüm noktası yaratmış ve disiplinlerarası perspektifler sunmuştur. Bu makalede kaos teorisinin tanımı, tarihi, dinamikleri ve disiplinlerarası uygulamaları incelenmiştir. Tıp, fizik, ekoloji, kimya, meteoroloji ve finans gibi alanlarda önümüze çıkan kaos aslında sadece matematiğe değil başka alanlara olan bakış açısını da değiştirmiş ve değiştirmeye devam etmektedir. Disiplinlerarası işbirliği ile kaos teorisinin potansiyelleri genişleyecek ve yeni keşiflere yol açacaktır.

References

- [1] Williams, G. P. (1997). *Chaos theory tamed*. Joseph Henry Press.
- [2] Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (2nd ed.). Westview Press.
- [3] Poincaré, H. (1890). Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, **13**, 1–270.
- [4] Barrow-Green, J. (1997). *Poincaré and the three body problem*. American Mathematical Society.

- [5] Birkhoff, G. D. (1927). *Dynamical Systems*. American Mathematical Society.
- [6] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**(2), 130–141.
- [7] Lorenz, E. N. (1972). Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas? [Conference presentation]. American Association for the Advancement of Science, Washington, D.C., United States.
- [8] May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, **261**(5560), 459–467.
- [9] Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company.
- [10] Gleick, J. (1987). *Chaos: Making a New Science*. Viking Penguin.
- [11] Hilborn, R. C. (2000). *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers* (2nd ed.). Oxford University Press.
- [12] Kellert, S. H. (1993). *In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems*. University of Chicago Press.
- [13] West, B. J. (2013). *Fractal Physiology and Chaos in Medicine* (2nd ed.). World Scientific.
- [14] Baker, G. L., & Gollub, J. P. (1996). *Chaotic Dynamics: An Introduction* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [15] Espinosa-Paredes, G. (2021). *Anomalous diffusion exponent in nuclear reactors*. In G. Espinosa-Paredes (Ed.), *Fractional-Order Models for Nuclear Reactor Analysis* (pp. 335-370). Woodhead Publishing. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-823665-9.00009-2>